§ 2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Механическая система с одной степенью свободы имеет одну обобщенную координату q, и ее движение описывается одним уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q. \quad (1)$$

Обобщенную силу Q можно считать состоящей из трех частей: $Q=Q^{П}+Q^{Ф}+Q^{В}$. Здесь $Q^{П}$ — обобщенная сила потенциальных сил. Она выражается через потенциальную энергию $П$ по формуле $Q^{П}=-\partial П/\partial q$. Потенциальная энергия в общем случае зависит от координат точек системы и, следовательно, от обобщенной координаты q и не зависит от обобщенной скорости $\dot q$. Для нестационарного силового поля, а также нестационарных связей потенциальная энергия может зависеть явно еще и от времени.

В $Q^{Ф}$ включим ту часть обобщенной силы, которая получается от действия сил сопротивления, зависящих как от числовых значений, так и направлений скоростей точек системы. В дальнейшем рассматривается случай линейного сопротивления, когда силы сопротивления точек системы пропорциональны скоростям этих точек и направлены в стороны, противоположные скоростям.

Часть обобщенной силы $Q^{В}$ получается от так называемых вынуждающих, или возмущающих, сил, зависящих прежде всего от времени. Ниже рассмотрен случай гармонической возмущающей силы, когда $Q^{В}$ изменяется с течением времени по синусоидальному закону. В общем случае зависимости $Q^{В}$ от времени ее можно разложить в ряд Фурье и рассматривать дифференциальные уравнения движения для каждого из синусоидальных слагаемых.

Собственные линейные колебания системы

Рассмотрим малые колебания системы с одной степенью свободы под действием одних потенциальных сил, т. е. когда $Q=Q^{П}=-\partial П/\partial q$. Считаем, что сил сопротивления и возмущающих сил нет. Такие колебания называются *собственными* или *свободными*. Колебания считаются малыми, если при движении системы обобщенные координата, скорость и ускорение достаточно малы и в уравнении Лагранжа (1) можно пренебречь всеми слагаемыми второго и более высокого порядков относительно q, $\dot q$ и $\ddot q$, т. е. слагаемыми, в которые входят квадраты этих величин, произведения и т. д. В случае малых колебаний системы получается линейное дифференциальное уравнение для обобщенной координаты q. Колебания, для которых дифференциальное уравнение является линейным, называются *линейными*. Малые колебания принадлежат к числу линейных. Но линейными могут быть не обязательно малые колебания.

Обычно ограничения, которые следует наложить на величины, характеризующие движение, чтобы колебания были малыми, удается установить только после полного решения задачи в предположении, что колебания малые. Ниже рассматриваются только малые или, если не малые, линейные колебания.

Дифференциальное уравнение собственных линейных колебаний системы. Для вывода из уравнения Лагранжа (1) линейного уравнения малых собственных колебаний следует кинетическую и потенциальную энергии разложить в ряды в окрестности положения равновесия системы, где $q=0$.

Пусть система, на которую наложены голономные, идеальные, неосвобождающие и стационарные связи, состоит из N точек и движется вблизи положения равновесия. Ее кинетическая энергия

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \bar v_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\bar r}_k^2.$$

При сделанных допущениях о стационарности связей радиус-вектор $\bar r_k$ каждой точки системы зависит от времени только через обобщенную координату q; следовательно, $\dot{\bar r}_k=\frac{\partial \bar r_k}{\partial q}\dot q$. Подставляя это $\dot{\bar r}_k$ в выражение кинетической энергии, получаем

$$T={}^1/_2 A\dot q^2,$$

где

$$A=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(\frac{\partial \bar r_k}{\partial q}\right)^2.$$

Величина A, как и $\bar r_k$, может зависеть только от q и не может зависеть от $\dot q$. Разлагая $A(q)$ в окрестности $q=0$ в степенной ряд, имеем

$$A(q)=A_0+\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2}+\ \dots .$$

Здесь и дальше индекс 0 означает, что соответствующие величины следует вычислять при $q=0$.

Для получения в разложении кинетической энергии слагаемых не выше второго порядка по отношению к q и $\dot q$ достаточно из разложения $A(q)$ взять только постоянное значение A_0, которое обозначим a. При учете других слагаемых из разложения $A(q)$ появляются члены третьего и более высокого порядков.

Итак, выражение кинематической энергии с отбрасыванием слагаемых третьего и более высокого порядков можно представить в виде

$$T={}^1/_2 a\dot q^2. \quad (2)$$

Положительная постоянная a называется *коэффициентом инерции*. Обычно по размерности коэффициент инерции является или массой, или моментом инерции.

Потенциальная энергия системы $П$ для стационарного силового поля и стационарных связей является функцией только обобщенной координаты q. Разлагая ее в степенной ряд в окрестности $q=0$, получаем

$$П(q)=П_0+\left(\frac{\partial П}{\partial q}\right)_0 q+\left(\frac{\partial^2 П}{\partial q^2}\right)_0\frac{q^2}{2!}+\left(\frac{\partial^3 П}{\partial q^3}\right)_0\frac{q^3}{3!}+\ \dots .$$

Потенциальную энергию $П_0$ в положении равновесия при $q=0$ примем равной нулю. Величина $(\partial П/\partial q)_0$ есть значение обобщенной силы Q в положении равновесия системы, равное нулю.

Будем считать, что в положении равновесия потенциальная энергия имеет минимум. Это является достаточным условием устойчивости положения равновесия системы. В этом случае

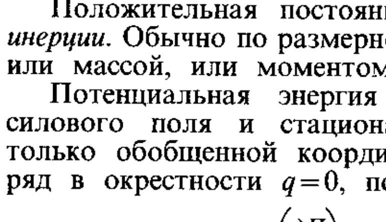

Рис. 110

величина $(\partial^2 П/\partial q^2)_0$ положительна. Обозначим ее c. Постоянную c называют *коэффициентом жесткости* или просто *жесткостью*.

Таким образом, отбрасывая слагаемые третьего и более высокого порядков, имеем

$$П(q)={}^1/_2 cq^2. \quad (3)$$

Системы, для которых кинетическая и потенциальная энергии выражаются точно по формулам (2) и (3) без отбрасывания слагаемых более высокого порядка, называются *линейными*. Для них вся математическая теория является такой же, как и для систем, совершающих малые колебания, хотя колебания для линейных систем могут быть любыми, не обязательно малыми. В дальнейшем рассматриваются линейные колебания, в число которых входят и малые колебания.

На основании (2) и (3) получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial q}=0;\ \frac{\partial T}{\partial \dot q}=a\dot q;\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}=a\ddot q;\ \frac{\partial П}{\partial q}=cq.$$

Подставляя эти значения производных в уравнение Лагранжа (1), получим следующее дифференциальное уравнение малых собственных колебаний системы с одной степенью свободы:

$$a\ddot q+cq=0. \quad (4)$$

При учете слагаемых третьего и более высокого порядка в разложениях кинетической и потенциальной энергий в уравнении (4) появляются члены второго и более высокого порядка и дифференциальное уравнение становится нелинейным.

Получим дифференциальное уравнение прямолинейных колебаний материальной точки, не обязательно малых. Пусть материальная точка M массой m движется прямолинейно по оси Ox под действием силы $\bar F$, которая линейно зависит от расстояния точки от положения равновесия O и стремится возвратить точку в положение равновесия (рис. 110).

Поместим начало отсчета расстояний x в положение равновесия — точку O. Сила $\bar F$ будет направлена к началу отсчета расстояний — точке O. В этой точке она равна нулю. Ее проекция на ось Ox

$$F_x=-c_0 x,$$

где постоянная величина c_0 — жесткость.

Силу $\bar F$ в этом случае называют *линейной восстанавливающей силой*. Силы упругости, подчиняющиеся закону Гука, являются линейными восстанавливающими силами.

Подставляя в дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки значение линейной восстанавливающей силы и перенося все члены в одну часть уравнения, получаем

$$m\ddot x+c_0 x=0. \quad (5)$$

Уравнение (5) является дифференциальным линейным уравнением собственных прямолинейных колебаний материальной точки.

Сравнивая (4) и (5), видим, что эти уравнения полностью аналогичны. Только в уравнение для системы вместо координаты x входит обобщенная координата q, вместо массы — коэффициент инерции a, а вместо жесткости c_0 следует взять коэффициент жесткости c.

Интегрирование дифференциального уравнения собственных колебаний. Если разделить обе части уравнения (4) на a и обозначить положительную величину $c/a=k^2$, то получим дифференциальное уравнение собственных линейных колебаний системы с одной степенью свободы в окончательной форме:

$$\ddot q+k^2 q=0. \quad (6)$$

Постоянная величина $k=\sqrt{c/a}$ называется *круговой* (или *циклической*) *частотой колебаний*.

Для прямолинейных колебаний материальной точки соответственно имеем

$$\ddot x+k^2 x=0,$$

где $k^2=c_0/m$.

Размерность круговой частоты k можно установить из уравнения (6). Так как

$$[\ddot q]=\frac{[q]}{[t^2]},$$

то

$$[k^2]=\frac{[\ddot q]}{[q]}=\frac{[q]}{[t^2]}\frac{1}{[q]}=\frac{1}{[t^2]};\ [k]=\frac{1}{[t]}=\frac{1}{с}=с^{-1},$$

если время t выражать в секундах. Ее размерность не зависит от размерности обобщенной координаты.

Круговая частота выражается в тех же единицах, что и угловая скорость, в частности единица круговой частоты колебаний точки k тоже $с^{-1}$.

Дифференциальное уравнение (6) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно искать в виде $q=e^{\lambda t}$. После подстановки этого выражения в (6) получаем характеристическое уравнение для уравнения (6)

$$\lambda^2+k^2=0.$$

Это квадратное уравнение имеет два чисто мнимых корня: $\lambda_{1,2}=\pm ki$.

На основе теории дифференциальных уравнений решение уравнения (6) можно представить в виде

$$q=C_1\cos kt+C_2\sin kt \quad (7)$$

и для обобщенной скорости

$$\dot q=-C_1 k\sin kt+C_2 k\cos kt.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий $t=0$, $q=q_0$, $\dot q=\dot q_0$, где q_0 и $\dot q_0$ — начальные значения обобщенной координаты и обобщенной скорости.

Используя выражения для q и $\dot q$ при $t=0$, получаем $C_1=q_0$; $C_2=\dot q_0/k$.

Подставляя их значения в (7), имеем

$$q=q_0\cos kt+\frac{\dot q_0}{k}\sin kt. \quad (8)$$

Уравнение (8) — одна из двух основных форм выражения собственных колебаний.

Для колебаний материальной точки соответственно

$$x=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt,$$

где x_0 и v_0 — начальное отклонение точки от положения равновесия и начальная скорость.

Представим выражение для q в другой, так называемой амплитудной, форме:

$$q=A\sin(kt+\alpha)=A\sin\alpha\cos kt+A\cos\alpha\sin kt.$$

Из сравнения этого выражения с (7) для новых постоянных получим формулы

$$C_1=A\sin\alpha;\ C_2=A\cos\alpha.$$

Отсюда

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2};\ \sin\alpha=C_1/A;\ \cos\alpha=C_2/A. \quad (9)$$

Иногда вычисляют $\operatorname{tg}\alpha=C_1/C_2$.

Подставляя в (9) вместо C_1 и C_2 их выражения через начальные значения, получаем:

$$A=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot q_0^2}{k^2}};\ \sin\alpha=\frac{q_0}{A};\ \cos\alpha=\frac{\dot q_0}{Ak};\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{q_0 k}{\dot q_0}. \quad (10)$$

Величину A считают положительной и называют *амплитудой колебаний*. Она определяет наибольшее отклонение обобщенной координаты от положения равновесия, соответствующего значению $q=0$. Обобщенная координата q изменяется в пределах от $+A$ до $-A$.

Безразмерная постоянная α называется *начальной фазой колебаний*. Она является значением *фазы колебаний* $(kt+\alpha)$ при $t=0$. Начальная фаза может изменяться в пределах от 0 до 2π. Для определения начальной фазы α по начальным условиям можно использовать любую комбинацию двух ее тригонометрических функций из (10), например $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

По одной тригонометрической функции, например $\operatorname{tg}\alpha$, получится два различных значения для α.

Собственные линейные колебания в амплитудной форме с учетом начальных условий можно представить в окончательной форме:

$$q=\sqrt{q_0^2+\frac{\dot q_0^2}{k^2}}\sin\left(kt+\operatorname{arctg}\frac{q_0 k}{\dot q_0}\right). \quad (11)$$

Для прямолинейных колебаний точки соответственно

$$x=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}}\sin\left(kt+\operatorname{arctg}\frac{x_0 k}{v_0}\right).$$

Движение системы, определяемое (8) или эквивалентной ему амплитудной формой (11), называется *гармоническим колебанием*. Гармоническими называются такие колебания, при которых обобщенная координата изменяется с течением времени по закону синуса или косинуса. Изменением фазы на $\pi/2$ от синуса можно перейти к косинусу.

Собственные линейные колебания системы с одной степенью свободы являются гармоническими. Материальная точка под действием линейной восстанавливающей силы тоже совершает гармонические колебания.

Обобщенная координата q изменяется по закону синуса, который является периодической функцией аргумента с наименьшим периодом 2π; следовательно, и q является периодической функцией. Значение периода колебаний τ для переменной t получим из условия, по которому добавление периода к этой переменной должно изменить фазу колебаний на наименьший период синуса 2π. Имеем

$$k(t+\tau)+\alpha=kt+\alpha+2\pi;\ \tau=2\pi/k=2\pi\sqrt{a/c}. \quad (12)$$

Для прямолинейных колебаний точки период $\tau=2\pi\sqrt{m/c_0}$.

Период колебаний выражается в единицах времени, например в секундах. Величина, обратная периоду $\nu=1/\tau$, называется частотой колебаний. Частота колебаний обычно определяется числом колебаний в секунду или в герцах (Гц). Частота, равная 1 Гц, соответствует одному колебанию в секунду.

Круговая частота k выражается через период колебаний и частоту в форме

$$k=2\pi/\tau=2\pi\nu. \quad (13)$$

Из (13) следует, что круговая частота k есть число колебаний за время, равное 2π с.

На рис. 111 представлен график собственных гармонических колебаний системы с одной степенью свободы. Он представляет собой синусоиду.

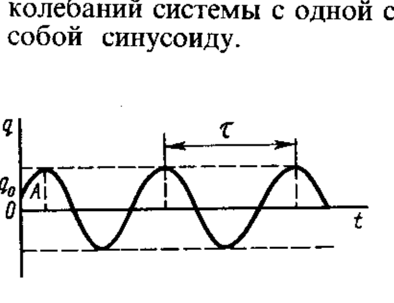

Рис. 111

Гармонические колебания полностью определяются амплитудой колебаний, периодом и начальной фазой. Отметим основные свойства собственных линейных колебаний.

Собственные линейные колебания системы являются гармоническими. Амплитуда этих колебаний — величина постоянная и определяется начальными условиями. Период колебаний тоже величина постоянная, не зависящая от амплитуды и, следовательно, от начальных условий.

Величина периода определяется только свойствами колеблющейся системы, т. е. коэффициентом инерции a и жесткостью c. Независимость периода колебаний от амплитуды называется *изохронностью колебаний*. Собственные линейные колебания, если нет возмущающих сил, могут возникнуть только при начальных условиях, не равных нулю, т. е. когда в начальный момент система имеет не равные нулю начальную обобщенную координату q_0 или начальную обобщенную скорость $\dot q_0$.

Гармонические колебания точки при наличии линейной восстанавливающей силы возникают вследствие начального отклонения точки x_0, или начальной скорости v_0, или и того и другого вместе. Гармонические колебания обладают той особенностью, что, возникнув однажды в какой-то момент времени, они продолжаются сколь угодно долго без изменения параметров колебаний, если нет других воздействий. Но обычно колебания всегда сопровождаются возникновением сил сопротивления, которые изменяют характер собственных колебаний.

Собственные колебательные движения, кроме графика колебаний, можно изобразить на фазовой плоскости — плоскости переменных q и $\dot q$, которые называются *фазовыми переменными*. Для случая колебаний точки фазовыми переменными являются x и $v=\dot x$. Построим фазовый портрет гармонических колебаний точки. Имеем

$$x=A\sin(kt+\alpha);\ v=\dot x=Ak\cos(kt+\alpha).$$

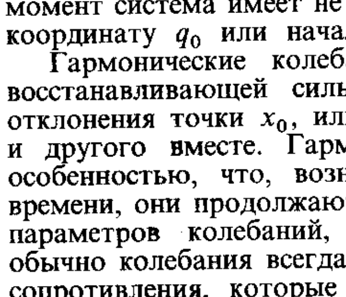

Рис. 112

Исключая из этих уравнений время t, получаем на фазовой плоскости (x, v) семейство эллипсов:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{A^2k^2}=1.$$

Эти кривые (рис. 112), зависящие от параметра A, называют *фазовыми траекториями*. Семейство фазовых траекторий зависит от амплитуды колебаний, которая, в свою очередь, определяется начальными условиями. Каждой фазовой траектории соответствует пара начальных значений x_0 и v_0.

Положению равновесия точки на фазовой плоскости соответствует начало координат $x=0$, $v=0$. Когда материальная точка совершает гармонические колебания, то с течением времени изменяются ее координата x и скорость v. Следовательно, каждому моменту времени на фазовой плоскости соответствует определенное положение изображающей точки с координатами x и v. За время одного полного гармонического колебания (за период) изображающая точка описывает на фазовой плоскости эллипс.

Отметим, что периодическим колебаниям на фазовой плоскости соответствуют замкнутые фазовые траектории, и наоборот. Вид фазовых траекторий характеризует устойчивость или неустойчивость положения равновесия, достаточную малость колебаний и т. д.

Фазовые траектории для консервативной системы можно построить используя интеграл энергии. Каждой фазовой траектории соответствует определенное значение полной механической энергии.

В тех случаях, когда дифференциальное уравнение колебательного движения является нелинейным, исследование движения с помощью фазовых траекторий — один из часто применяемых методов.

Пример. Груз, имеющий силу тяжести $P=20$ Н, подвешен на пружине (рис. 113). Статическое удлинение пружины под действием силы тяжести груза $\lambda_{ст}=5$ см.

Определить движение груза, если в начальный момент удлинение пружины $\lambda_0=8$ см и начальная скорость груза $v_0=10$ см/с и направлена вниз.

Решение. Груз будет двигаться прямолинейно. За начало отсчета расстояний x выберем положение статического равновесия груза, при котором сила тяжести $\bar P$ уравновешивает силу упругости пружины $\bar F$, направив ось Ox вниз по траектории движения груза. Силу упругости пружины считаем пропорциональной ее удлинению из недеформированного состояния.

Пусть груз в момент времени t находится на расстоянии x от начала отсчета. На него действуют сила тяжести $\bar P$ и сила упругости $\bar F$, причем

$$F=c\lambda=c(\lambda_{ст}+x),$$

где $(\lambda_{ст}+x)$ — удлинение пружины; c — коэффициент жесткости.

В положении статического равновесия груза $x=0$, $F=c\lambda_{ст}=P$. Следовательно, $c=P/\lambda_{ст}$.

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения груза в общем случае имеет вид

$$m\ddot x=\sum_{k=1}^{N}F_{kx}.$$

В рассматриваемом случае

$$\sum_{k=1}^{N}F_{kx}=P-F=P-c(\lambda_{ст}+x)=(P-c\lambda_{ст})-cx=-cx.$$

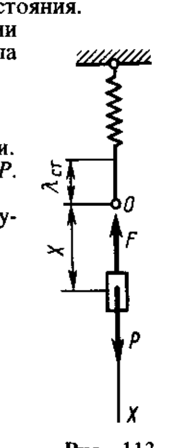

Рис. 113

Следовательно,

$$m\ddot x=-cx;\ \ddot x+k^2x=0;\ k=\sqrt{c/m}.$$

Если за начало отсчета выбрать не положение статического равновесия, то уравнение будет иметь постоянную правую часть, т. е. будет неоднородным.

Решение дифференциального уравнения можно выразить в следующей форме:

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt;\ v=\dot x=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются по начальным условиям: время $t=0$; начальная скорость $\dot x=v_0=10$ см/с;

$$x=x_0=\lambda_0-\lambda_{ст}=8-5=3\ \text{см};$$

$$k=\sqrt{c/m}=\sqrt{g/\lambda_{ст}}=\sqrt{980/5}=14\ с^{-1}.$$

Постоянные C_1 и C_2, согласно формулам для x и $\dot x$ при $t=0$, имеют значения

$$C_1=x_0=3\ \text{см};\ C_2=v_0/k=0{,}71\ \text{см}.$$

Уравнение движения груза принимает вид

$$x=3\cos 14t+0{,}71\sin 14t\ \text{см}.$$

Приведем его к амплитудной форме. Амплитуда

$$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\sqrt{9+0{,}50}\approx 3{,}08\ \text{см}.$$

Для начальной фазы α

$$\sin\alpha=C_1/A=0{,}97>0;\ \cos\alpha=C_2/A=0{,}71/A>0.$$

Следовательно, угол α находится в первой четверти и по значению, например, $\sin\alpha$ получаем $\alpha=1{,}34=0{,}43\pi$. Уравнение движения груза в амплитудной форме имеет вид

$$x=3{,}08\sin(14t+0{,}43\pi)\ \text{см}.$$

Период собственных гармонических колебаний груза

$$\tau=2\pi/k=0{,}45\ \text{с}.$$